FS1111

Oscilaciones Armónicas

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Introducción

Este es el último tema del curso podría haber estado en algún otro punto del programa pero está al final, esto tiene en primer lugar un propósito docente: este es el último tema porque nos va a permitir integrar todas las destrezas que hemos desarrollado durante el curso. Este es un objetivo importante en sí mismo, la integración de destrezas es fundamental para el aprendizaje, sin embargo, esta no es la única razón para haber escogido el tema de oscilaciones, quizá se pudo haber pensado en otra cosa así que en el próximo párrafo trataremos de explicarle la razón de haber escogido precisamente este tema y no otro para concluir el curso.

El oscilador armónico es uno de los sistemas físicos no triviales más sencillos que se pueden concebir, a pesar de su sencillez, este sistema aparece una y otra vez en problemas de ciencias e ingeniería, en medicina aparece como modelo para describir ciertos problemas relacionados con la concentración de insulina en la sangre [ref....Brfaun], en teoría de circuitos aparece en el análisis de los circuitos RLC, también aparece cuando se consideran los movimientos de los átomos en una red cristalina (esto es, en temas asociados a la ingeniería de materiales) y por supuesto, en diversos dispositivos mecánicos, así pues, el estudio del oscilador armónico dista mucho de ser un problema puramente académico y es de hecho un tema de estudio fundamental.

En varios de los problemas propuestos usted ha tenido la oportunidad de estudiar la ley horaria

$$x(t) = A\,cos(\omega_0\,t)\,, \tag{1}$$

enre otras cosas usted debe haber quedado convencido de lo siguiente: si se define un vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_x$ orientado en el sentido de las x crecientes, la ley horaria representada en la fórmula 1 tiene como causa la acción sobre una partícula de masa m de la fuerza neta:

$$\mathbf{F} = -k\, x\, \hat{\mathbf{e}}_x \qquad \text{con:} \qquad k = m\, \omega_0^2 \,, \tag{2}$$

en estos apuntes vamos a estudiar varios aspectos interesantes del problema.

Entre otros, vamos a mostrar (hasta donde sea posible dar una demostración rigurosa) que la segunda ley de Newton implica que si la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m tiene la forma 2 la única posibilidad es que la ley horaria de la partícula tenga la forma general

$$x(t) = A\, cos(\omega_0\, t + \phi)\,, \tag{3}$$

donde A y ϕ son constantes que deben determinarse a partir de condiciones físicas, de hecho, mostraremos este resultado al menos de dos formas distintas.

2. Cinemática

El movimiento descrito por la ley horaria

$$x(t) = A\, cos(\omega_0\, t + \phi)\,, \tag{4}$$

es conocido como movimiento armónico simple (abreviado MAS), vamos a empezar por discutir algunos aspectos puramente cinemáticos que usted podría haber descubierto en problemas asociados a los temas anteriores.

En primer lugar, notemos que si en 4 sustituimos t por $t + 2\pi/\omega_0$ resulta que

$$x(t) = x(t + 2\pi/\omega_0)\,, \tag{5}$$

de manera que el MAS es un movimiento periódico de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\,. \tag{6}$$

al recíproco del período (es decir a la cantidad $f = 1/T$) se le denomina frecuencia y sus dimensiones son ciclos/tiempo (en el SI serían ciclos/s ó Hertz). La cantidad A representa la máxima distancia que la partícula puede alejarse de la posición $x = 0$, esta cantidad se denomina amplitud el áqngulo ϕ se denomina fase inicial y la cantidad $A\,cos(\phi)$ es la posición de la partícula en $t = 0 + 2\,n\,\pi$, $n = 1, 2, 3, ...$

Finalmente una observaciónn en que se hace mucho énfasis en la literatura es la siguiente: desde un punto de vista cinemático un MAS corresponde exactamente con la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforma de frecuencia angular ω_0 y radio A

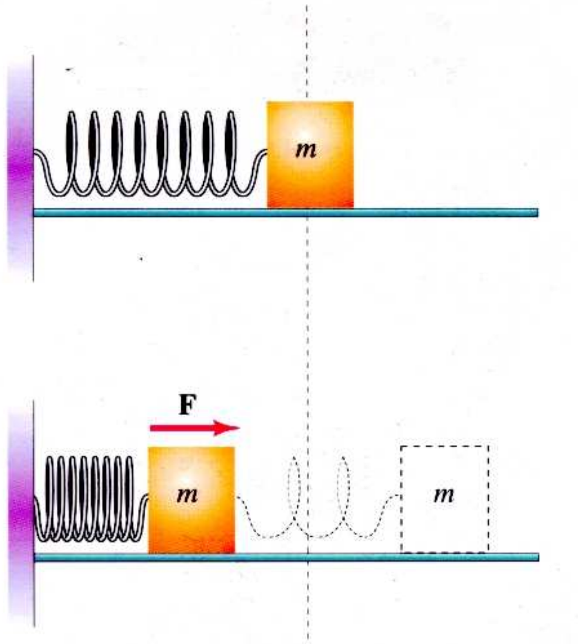
De mucho menor importancia es el hecho de que si ψ es el ángulo complementario de ϕ (es decir: $\phi + \psi = \pi/2$ podemos expresar la ley de horaria MAS como

$$x(t) = A\,sen(\omega_0\,t + \psi)\,, \tag{7}$$

otra forma de la expresar la ley horaria que representa al MAS es

$$x(t) = a\,cos(\omega_0\,t) + b\,sen(\omega_0\,t) \tag{8}$$

3. Energía



Resorte ideal: la fuerza que el resorte ejerce sobre la masa es restauradora (está dirigida hacia la posición natural ó de equilibrio del resorte) y proporcional a la elongación (distancia hasta el punto de equilibrio), de manera que podemos modelar a un resorte ideal a través de la ley de Hooke: $\mathbf{F} = -\kappa\, x\, \hat{\mathbf{e}}_x$

Ya hemos estudiado la cinemática del movimiento armónico simple. Estudiemos ahora sus aspectos energéticos, para ello comencemos por establecer un modelo de mecanismo que produzca la fuerza $\mathbf{F} = -k\, x\, \hat{\mathbf{e}}_x$, el modelo físico más sencillo posible se conoce como *resorte ideal*, un resorte ideal no es otra cosa que un resorte sin masa de longitud ℓ_0 y que para ser estirado o encogido por un agente externo, este debe ejercer sobre los extremos del resorte una fuerza de magnitud proporcional a la elongación.

Es facil ver que, definiendo la referencia de energía potencial como $U(0) = 0$, la fuerza $\mathbf{F} = -k\, x\, \hat{\mathbf{e}}_x$ se deriva del potencial

$$U(x) = \frac{k\, x^2}{2}\,, \tag{9}$$

debido a este hecho, la energía mecánica total de una partícula sometida a la acción de la fuerza

2 está dada por

$$E = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,. \tag{10}$$

ó

$$E = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2\,x^2}{2}\,. \tag{11}$$

Cuando se alcanza la máxima elongación, esto es, cada vez que la partícula alcanza las posiciones $x = \pm A$ su velocidad es nula ($\dot{x} = 0$), sustituyendo esto en la expresión general para la energía se obtiene sin esfuerzo alguno

$$E = \frac{kA^2}{2} \tag{12}$$

Podemos mostrar este resultado utilizando un método de fuerza bruta mucho menos elegante que consiste en sustituir la ley de movimiento en la expresión general de la energía lo que lleva a

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\,A^2\,\omega_0^2\,sen^2(\omega_0\,t)}{2} + \frac{k\,A^2\,cos^2(\omega_0\,t)}{2} = \\ &= k\,A^2\left(\frac{sen^2(\omega_0\,t)}{2} + \frac{cos^2(\omega_0\,t)}{2}\right) = \frac{kA^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

que por supuesto es el resultado que habíamos encontrado anteriormente.

Ejemplo 1 *Hay un sistema mecánico sumamente sencillo que tambien reproduce un movimiento armónico simple, a saber: el péndulo simple. Un péndulo simple no es más que una masa que cuelga de un techo suspendida por un hilo ó barrita de masa despreciable y que oscila en ángulos pequeños.*

Para estudiar el problema consideremos la figura **??** *y la notaqción que allí se introduce. Es claro que la tensión no realiza trabajo y que por tanto podemos utilizar argumentos de*

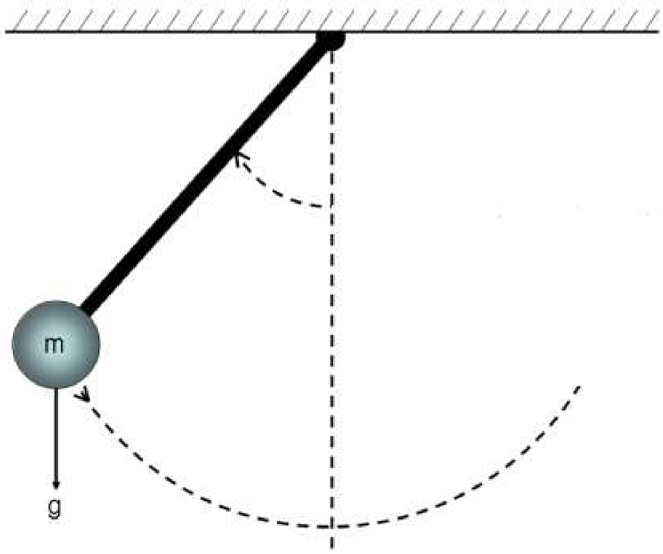


Figura 1: El péndulo simple, en esta figura denominaremos θ al ángulo que la barrita hace con la vertical y ℓ a la longitud de la barra

conservación de energía para trabajar de manera escalar. Escogiendo el punto más bajo de la trayectoria de m *como punto de energía potencial gravitacional nula podemos poner de inmediato (solo vea el dibujito)*

$$U(\theta) = mg\ell\,(1 - cos\theta) \tag{14}$$

de manera que

$$E = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + mg\ell\,(1 - cos\theta)\ , \tag{15}$$

ahora bien, si el ángulo de oscilación es pequeño podemos sustituir $cos(\theta)$ *por su aproximación de segundo orden:* $cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$*, de manera que, en esta aproximación la energía puede expresarse* *en la forma*

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m(\ell\dot{\theta})^2}{2} + \frac{mg\ell\theta^2}{2} = \frac{m(\ell\dot{\theta})^2}{2} + \frac{mg(\ell\theta)^2}{2\ell} = \\
&= \frac{m\,\dot{s}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2\,s^2}{2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

donde $s = \ell\theta$ *y* $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$*, comparando el último resultado con la fórmula 11 reconocemos efectivamente la energía de un oscilador armónico de período* $T = \sqrt{\ell/g}$

4. Encontrando la ley horaria

Esta sección está dedicada a demostrar que una partícula de masa m sometida a la fuerza de Hooke

$$\mathbf{F}(x) = -k\,x\,\hat{\mathbf{e}}_x\,, \tag{17}$$

tiene que moverse necesariamente bajo la ley horaria

$$x(t) = A\,cos(\omega_0\,t + \phi) \tag{18}$$

en las siguiejntes subsecciones nos vamos a dedicar a demostrar que $x(t)$ res lo que es!!!

4.1. Métodos energéticos

La expresión general para la energía permite expresar la componente de la velocidad como

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\,x^2}\,, \tag{19}$$

esto no es otra cosa que una ecuación diferencial de primer orden separable. La integraremos con el mismo procedimiento que utilizamos con el problema del paracaidista.

Comencemos por separar las variables reexpresando la ecuación en la forma

$$\pm dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\, x^2}}\,, \tag{20}$$

podemos integrar esta igualdad entre dos instantes de tiempo (pensemos en que el instante inicial es $t = 0$) para obtener

$$\pm \int_0^t ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\, \chi^2}}\,, \tag{21}$$

o

$$\pm t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\, \chi^2}}\,. \tag{22}$$

Para tratar la integral del lado derecho transformándola en una integral elemental[1] introducimos el cambio de variables$\sqrt{k}m\chi = u$ que nos deja con

$$I(x(t)) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\, \chi^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\sqrt{m/k}\, x_0}^{\sqrt{m/k}\, x(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m} - u^2}}\,, \tag{23}$$

es decir:

$$I(x(t)) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\sqrt{m/k}\, x_0}^{\sqrt{m/k}\, x(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m} - u^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, arcsen \left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\, u \right) \Bigg|_{\sqrt{m/k}\, x_0}^{\sqrt{m/k}\, x(t)} \tag{24}$$

Sustituyendo en $\pm t = I(x(t))$ resulta

$$\pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, t = arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}}\, x(t) \right) - arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}}\, x_0 \right)\,, \tag{25}$$

de acá es sencillo obtener finalmente a x como función de t (la ley horaria)

$$x(t) = \frac{\sqrt{2kE}}{m}\, sen \left(\omega_0\, t + arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}}\, x_0 \right) \right)\,, \tag{26}$$

[1] $\int \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = arcsen \left(\frac{u}{A} \right) + constante$

con el fin de presentar el resultado en la forma usual definimos $A = \frac{\sqrt{2kE}}{m}$, $\phi = arcsen\left(\frac{m}{\sqrt{2kE}}\,x_0\right)$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qure lleva al resultado final:

$$x(t) = A\,sen\,(\omega_0\,t + \phi))\ . \tag{27}$$

4.2. Resolviendo la ecuación de movimiento

Consideremos la segunda ley de Newton

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x \tag{28}$$

Ya hemos aprendido anteriormente (vea los apuntes de cinemática y dinámica del movimiento circular) que la anterior es una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes, de hecho, hemos aprendido una técnica para resolverla, colocar $x(t) = e^{\lambda\,t}$ para sustituir la ecuación diferencial por la búsqueda de las soluciones de la ecuación algebráica

$$\lambda^2 = -\omega_0^2\,, \tag{29}$$

que son dos raices imaginarias puras, a saber: $\lambda = \pm i\omega_0$ $(i = \sqrt{-1})$.

De manera que tenemos dos soluciones posibles,

$$x_\pm(t) = e^{\pm i\omega_0\,t}\,, \tag{30}$$

Ahora bien, uno de los resultados más bellos de las matemáticas es la fórmula[2]

$$e^{ix} = cosx + i\,senx \qquad \forall x \in \Re\,, \tag{31}$$

[2]que por supuesto generaliza la fórmula de Euler $e^{i\pi} = -1$

lo que en nuestro caso trae un problema, las soluciones que hemols encontrado son de una variable real pero tienen valores complejos, y claro, nadie ha visto jmamás una distancia compleja. Sin embargo, no nos preocupemos demasiado de esto e intentemos utilizar la solución compleja

$$x(t) = z_1\, e^{i\omega_0\, t} + z_2\, e^{-i\omega_0\, t} \tag{32}$$

donde $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ son números complejos (es decir, que tenemos cuattro números reales a nuestra dsiposición) solo para divertirnos y tratar de resolver nuestro problema de una posición compleja. Comencemos expresando la solución general 32 en forma explícita

$$x(t) = (a_1 + ib_1)\, (cos(\omega_0\, t + isen(\omega_0\, t)) + (a_2 + ib_2)\, (cos(\omega_0\, t - isen(\omega_0\, t)) \ , \tag{33}$$

que reordenando términos se escribe como

$$\begin{aligned} x(t) &= (a_1 + a_2)\, cos(\omega_0\, t) + (b_2 - b_1)\, sen(\omega_0\, t) \\ &+ i\, [(b_1 + b_2) cos(\omega_0\, t) + (a_1 - a_2) sen(\omega_0\, t)] \ , \end{aligned} \tag{34}$$

la última línea de esta fórmula muestra nuestro problema de manera explícita, efectivamente, $x(t)$ tiene una parte imaginaria ($Im(x(t)) \neq 0$) que debería ser nula. Ahora bien, ya comentamos que los dos números complejos z_1 y z_2 contienen cuatro números reales, por otra parte la solución de una ecuación dinámica de segundo orden solo requiere dos números reales (las condiciones iniciales) así que utilicemos dos de los cuatro reales que tenemos a nuestra disposición para cancelar $Im(x(t))$, esto puede hacerse sin problema imponiendo $a_1 = a_2$ y $b_1 = -b_2$ con lo que nuestra solución gneral adopta solo valores reales quedando como

$$x(t) = 2a_1\, cos(\omega_0\, t) + 2b_2\, sen(\omega_0\, t)\, , \tag{35}$$

redefiniendo las cosas poniendo $a = 2a_1$ y $b = 2b_2$ quedamos con

$$x(t) = a\,cos(\omega_0\,t) + b\,sen(\omega_0\,t)\,. \tag{36}$$

Para llegar a la representación amplitud-fase introducimos un truquito, podemos factorizar la cantidad $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ en la forma

$$x(t) = A\left[\frac{a}{A}\,cos(\omega_0\,t) + \frac{b}{A}\,sen(\omega_0\,t)\right]\,. \tag{37}$$

En este punto podemos imaginar un triángulo rectángulo de catetos a y b cuya hipotenusa por lo tanto sería A, obviamente, el seno y el coseno de uno de los ángulos agudos de este triángulo (denotémosle con la letra griega ϕ están dados por

$$cos\phi = b/A \qquad \text{y } sen(\phi) = a/A \tag{38}$$

lo que nos permite reescribir la solución general real para la ley horaria en la forma

$$x(t) = A\,[sen\phi\,cos(\omega_0\,t) + cos\phi\,sen(\omega_0\,t)] = A\,sen(\omega_0\,t + \phi)\,. \tag{39}$$

Escogiendo las cosas de otra manera podemos obtener

$$x(t) = \pm A\,[cos\phi\,cos(\omega_0\,t) - sen\phi\,sen(\omega_0\,t)] = A\,cos(\omega_0\,t + \phi) \tag{40}$$

5. Oscilaciones amortigüadas

Modifiquemos un poquitín el sistema que estamos estudiando añadiéndole una fuerza de frenado viscosa (que modelaremos como proporcional a la rapidez y opuesta a la velocidad), esto es $\mathbf{F}_v = -\gamma \dot{x}\, \mathbf{e}_x$ donde γ es una constante positiva, la ecuación de movimiento de la partícula resultante es

$$m\ddot{x} = -k\, x - \alpha \dot{x} \tag{41}$$

que podemos reescribir como

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{42}$$

Una vez más podemos proponer una solución exponencial para obtener que la condición necesaria y suficiente para que esta sea solución es que la cantidad λ sea solución de la ecuación

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{43}$$

donde $2\beta = \gamma/m$ y $\omega_0^2 = k/m$. Obviamente

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\Delta}\,, \tag{44}$$

donde el discriminante de la ecuación polinómica es $\Delta = \beta^2 - \omega_0^2$. Hay tres casos de interés:

$$\begin{aligned} \Delta &< 0 \quad \text{amortigüamiento subcrítico} \\ \Delta &= 0 \quad \text{amortigüamiento crítico, y} \qquad (45) \\ \Delta &> 0 \quad \text{sobreamortigüamiento} \qquad (46) \end{aligned}$$

En el caso del amortigüamiento subcrítico, se obtienen dos soluciones independientes,

$$x_{\pm}(t) = e^{-\beta\, t}\, e^{i\omega\, t}\,, \tag{47}$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Estas soluciones pueden combinarse en una estructura tipo amplitud-fase

$$x(t) = e^{-\beta\, t}\, cos(\omega\, t + \phi)\,. \tag{48}$$

En estas soluciones o en las figuras adjuntas se observa claramente que el movimiento resultante es un movimiento de oscilación alrededor de la posición de equilibrio del resorte pero con amplitud cada vez más pequeña.

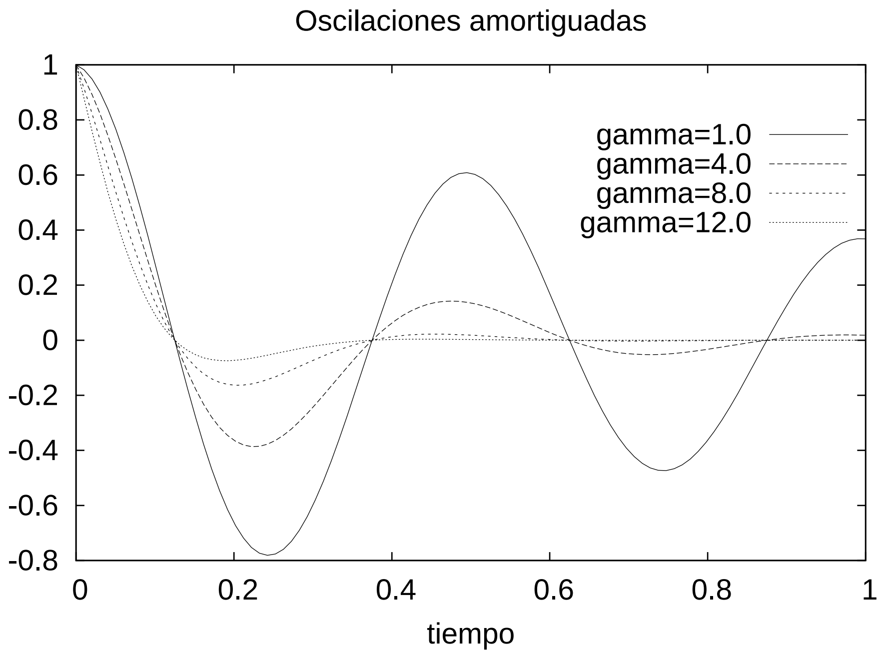


Figura 2: Oscilaciones amortiguadas, el caso (a) corresponde a un amortiguamiento debil, mientras que los casos (b) y (c) corresponden a amortiguamientos muy fuertes pero no críticos o sobreamortigüados.

Como aplicación interesante de los osciladores amortiguados, cabe decir que los sistema de amortigüación de los automoviles son compuestos, hay resortes y ballestas y los dispositivos realmente denominados amortigüadores. Si uno paseara en un auto sin amortigüadores sentir—́ia al carro oscilar como un lanchón (se comportaría de manera parecida a una partícula adosada a un resorte ideal), el efecto de los amortigüadores consiste en eliminar la oscilación

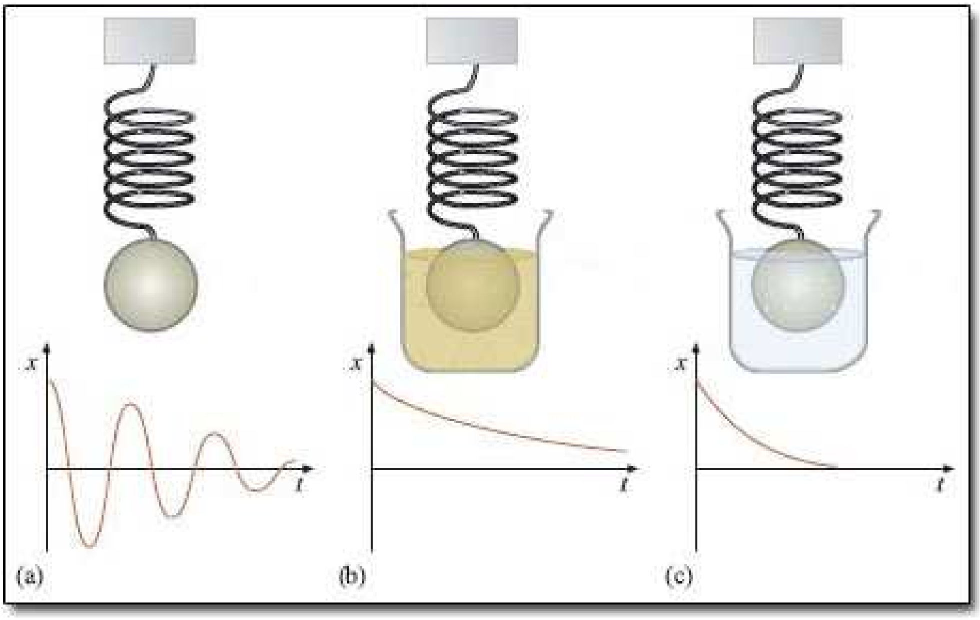


Figura 3: Oscilaciones amortiguadas, el caso (a) corresponde a un amortigüamiento debil, mientras que los casos (b) y (c) corresponden a amortiguamientos muy fuertes.

como hemos estudiado en esta sección.